

ANALISA ELASTISITAS DENGAN BOUNDARY ELEMENT

Supriyono

Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Surakarta

e-mail: supriyono@ums.ac.id

ABSTRAK

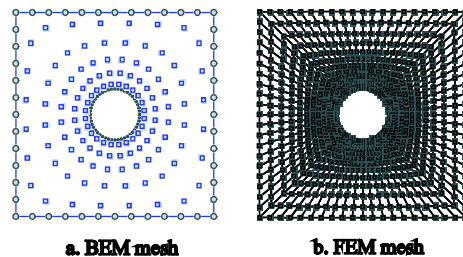
Dalam tulisan ini, analisa elastisitas dengan boundary element method disampaikan. Perumusan-perumusan boundary element method juga diperkenalkan. Untuk menyelesaikan persamaan yang didapatkan integrasi numerik diterapkan. Elemen dari tipe Quadratic isoparametric digunakan untuk merepresentasikan variasi variable yang tidak diketahui sepanjang elemen. Beberapa contoh aplikasi disampaikan untuk menunjukkan keakurasian Boundary Element Method.

Kata Kunci: *elastisitas, integrasi numerik, isoparametric element, boundary element method.*

PENGANTAR

Secara umum, terdapat tiga metoda yang berbasis metoda numerik dalam analisa masalah dalam bidang teknik mesin, yaitu Finite Difference Method (FDM), Finite Element Method (FEM), dan Boundary Element Method (BEM). FDM and FEM dikenal dengan metoda domain, karena diskritisasi domain diperlukan dalam analisa. Pada sisi lain, BEM (Brebbia, 1984) dikenal sebagai metoda batas. Fitur yang paling menarik dari BEM adalah diskritisasi dilakukan hanya pada batas model. Dengan demikian terdapat pengurangan dimensi permasalahan. Hal ini berarti bahwa untuk permasalahan 2 dimensi, diskritisasi dilakukan hanya pada garis batas luasan, sementara permasalahan 3 dimensi, hanya luasan batas volume yang didiskritisasi (lihat Gambar 1).

Aplikasi BEM saat ini belum seluas FEM, namun demikian metoda ini telah menjadi mapan sebagai alternatif yang efektif menggantikan FEM pada beberapa aplikasi teknik, seperti pada mekanika perpatahan.



Gambar 1. 2D BEM vs FEM mesh

Perumusan BEM dapat dibagi menjadi 2 kategori yang satu sama lain saling berdekatan. Pertama dan mungkin yang paling terkenal adalah formulasi langsung. Dimana, fungsi yang tidak diketahui adalah variabel nyata dari permasalahan yang dianalisa. Dalam elastisitas fungsi yang tidak diketahui itu adalah fungsi deformasi dan tegangan.

Kategori yang kedua adalah formulasi tidak langsung. Dimana, fungsi yang tidak diketahui diwakili *fictitious source densities*. Sekali *source densities* diketahui, nilai-nilai parameter fisik yang diinginkan dapat ditentukan dengan integrasi.

Sejarah perkembangan BEM dapat dimulai dengan formulasi klasik matematika oleh Betti (1872), Somigliana (1886), Fredholm (1903), and Mikhilin (1957).

Formulasi oleh Fredholm and Mikhilin ditujukan untuk permasalahan potensial (*potential problems*), sementara itu formulasi oleh Betti and Somigliana berhubungan dengan permasalahan elastisitas. Perkembangan selanjutnya dilakukan oleh peneliti-peneliti seperti : Jaswon (1963), Massonnet (1965), Hess and Smith (1967), Rizzo (1967) and Cruse (1969). Cruse adalah orang pertama yang memperkenalkan BEM untuk elastisitas 3 dimensi. Lachat and Watson (1976) mengembangkan formulasi isoparametrik element seperti yang dipakai dalam FEM. Pengembangan BEM berikutnya banyak dilakukan Aliabadi (2001), Brebbia (1992), Banerjee(1992), Becker (Becker1992), dan Wrobel (2001).

Tulisan ini akan memperkenalkan aplikasi BEM untuk problem elastisitas 2 dimensi. Dalam tulisan ini notasi tensor Cartesian digunakan dan indeks dengan huruf latin harga adalah 1 dan 2.

INTEGRAL DEFORMASI DAN TEGANGAN

Aplikasi BEM pada bidang *solid mechanics* didasarkan pada identitas Somigliana. Identitas Somigliana untuk permasalahan deformasi elastis 2D menyatakan bahwa deformasi sembarang titik X' [$u_i(X')$] bagian dari suatu domain ($X' \in V$) terhadap nilai-nilai deformasi [$u_j(x)$] dan tegangan [$t_j(x)$] pada batas domain dapat dinyatakan sebagai (Aliabadi, 2001):

$$u_i(X') = \int_S U_{ij}(X',x) t_j(x) dS - \int_S T_{ij}(X',x) u_j(x) dS \quad (1)$$

dimana, $U_{ij}(X',x)$ and $T_{ij}(X',x)$ adalah *fundamental solutions* yang mewakili deformasi dan tegangan dalam arah j pada suatu titik x karena gaya titik satuan dalam arah i pada titik X' . *Fundamental solutions* dapat ditemukan dalam Aliabadi (2001).

Persamaan (1) valid untuk sembarang titik asal dalam domain ($X' \in V$), untuk menemukan penyelesaian pada titik-titik batas domain. Perlu memperhatikan proses limit sebagaimana $X' \rightarrow x' \in S$. Proses pelimitan dapat ditemukan pada berbagai

buku referensi, seperti Aliabadi (2001), Brebbia (1992), Banerjee(1992), Becker (Becker1992), and Wrobel (2001). Setelah proses limit, integral deformasi pada batas domain dapat dinyatakan sebagai :

$$C_{ij}(x')(u_j(x')) = \int_S U_{ij}(x',x) t_j(x) dS - \int_S T_{ij}(x',x) u_j(x) dS \quad (2)$$

dimana, $C_{ij}(x')$ adalah suku bebas yang dirumuskan sebagai $C_{ij}(x') = \delta_{ij}(x') + \alpha_{ij}(x')$, Untuk batas domain yang halus suku bebas berharga 0.5.

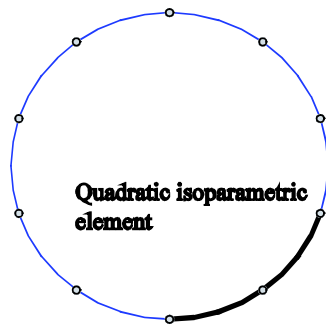
Untuk integral tegangan, dinyatakan sebagai :

$$\sigma_j(X') = \int_S U_{ijk}(X',x) t_k(x) dS - \int_S T_{ijk}(X',x) u_k(x) dS \quad (3)$$

Sebagaimana persamaan (1), persamaan (3) valid untuk sembarang titik asal dalam domain ($X' \in V$). Untuk menghitung tegangan pada batas domain terdapat dua metoda. Metoda yang pertama disebut sebagai *indirect approach* menggunakan penyelesaian persamaan boundary (2). Metoda kedua disebut *direct approach* melalui proses limit sebagaimana $X' \rightarrow x' \in S$. Metoda kedua ini sangat rumit, sehingga metoda pertama lebih populer dan ekonomis. Detail penjelasan dan cara metoda pertama ini dapat dilihat pada Aliabadi (2001).

DISKRITISASI DAN SISTEM PERSAMAAN

Untuk menyelesaikan persamaan (2), pendekatan numerik dilakukan. Hal ini dilakukan karena penyelesaian analitis hamper tidak mungkin karena rumitnya persamaan. Batas domain S dilakukan diskritisasi ke dalam N_e menggunakan elemen *quadratic isoparametric*, seperti dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Diskritisasi

Pada formulasi ini, parameter batas domain x_j , nilai-nilai yang tidak diketahui dari deformasi u_j and tegangan t_j didekati dengan fungsi interpolasi sebagai berikut :

$$x_j = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi) x_j^{\alpha}$$

$$u_j = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi) u_j^{\alpha}$$

$$t_j = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi) t_j^{\alpha} \quad (4)$$

Fungsi bentuk N_{α} ditentukan sebagai berikut

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

$$N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (5)$$

Substitusi persamaan (4) dan persamaan (5) ke dalam persamaan (2), didapatkan (integral pada batas domain S):

$$\int_S T_j(x', x) u_j(x) \mathcal{B} = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 u_j^{\alpha} \int_{-1}^1 T_j(x', x(\xi)) N_{\alpha}(\xi) J^n(\xi) d\xi$$

$$\int_S U_j(x', x) p_j(x) \mathcal{B} = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 t_j^{\alpha} \int_{-1}^1 U_j(x', x(\xi)) N_{\alpha}(\xi) J^n(\xi) d\xi \quad (6)$$

dimana, N_e adalah jumlah elemen pada batas domain S and J^n adalah transformasi Jacobian.

Setelah diskritisasi dan *point collocation* pada batas domain, persamaan (6) dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai :

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (7)$$

Dimana, $[H]$ and $[G]$ dikenal dengan nama *element influence matrices* batas. $\{u\}$, $\{t\}$,

masing-masing adalah deformasi dan traksi pada batas domain.

Setelah memasukkan kondisi batas, persamaan (7) dapat ditulis sebagai system persamaan aljabar sebagai :

$$[A]\{x\} = \{f\} \quad (8)$$

dimana, $[A]$ adalah matrik sistem, $\{x\}$ matrik dari variable yang tidak diketahui dan $\{f\}$ adalah matrik kolom dari *prescribed boundary values*.

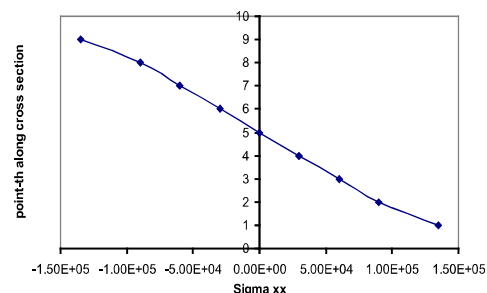
Dengan cara yang sama persamaan (3) dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matrik sebagai

$$[\sigma] = [G]\{t\} - [H]\{u\} \quad (9)$$

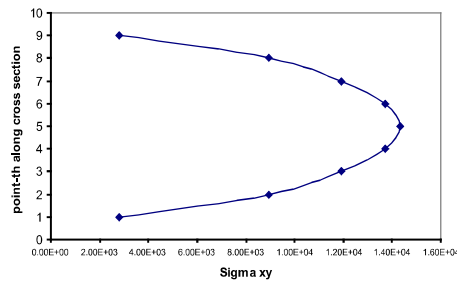
Contoh

Untuk menunjukkan keakuratan dan validitas BEM untuk analisa elastisitas 2 dimensi berikut disampaikan contoh-contoh sebagai berikut :

Sebuah balok cantilever dengan lebar 9 satuan dan panjang 100 satuan. Pada ujung bebas diberikan beban sebesar 100 satuan. Gambar 3 menunjukkan distribusi tegangan normal sepanjang penampang melintang pada bagian yang menira beban momen terbesar. Sementara itu untuk distribusi tegangan geser pada bagian yang sama ditunjukkan oleh Gambar 4.

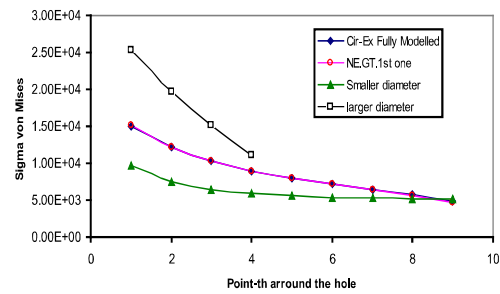


Gambar 3. Distribusi tegangan normal sepanjang penampang melintang balok cantilever.



Gambar 4. Distribution of shear stress along the cross section of cantilever beam.

Contoh kedua adalah sebuah pelat empat persegi panjang dengan lebar $2W$ dan panjang $6W$, dengan lubang lingkaran berdiameter $R=0,25W$ dan $R=0,1W$ ditarik dengan tegangan sebesar 100 satuan. Gambar 5 menunjukkan distribusi tegangan von Mises untuk pelat tersebut di atas.



Gambar 5. Distribusi tegangan sekitar lubang lingkaran.

Kesimpulan

Beberapa point bisa disimpulkan dari pembahasan di atas, yaitu:

1. Fitur yang paling menarik dari BEM adalah pengurangan dimensi masalah yang dianalisa.
2. Teknik diskritisasi yang dilakukan di BEM mempunyai kesamaan dengan FEM.
3. BEM telah menjadi alternatif yang efektif terhadap FEM dalam beberapa area analisa rekayasa.

DAFTAR PUSTAKA

- Aliabadi, M.H., The Boundary Element Method, vol II: application to solids and structures, Chichester, Wiley (2001).
- Banerjee, P.K., The Boundary Element Method in Engineering, McGraw-Hill, New York (1992).
- Becker, A., The Boundary Element Method in Engineering, McGraw-Hill, London (1992).
- Betti, E., Teoria dell'elasticita', Il Nuovo Cimento, 7-10, (1872).
- Brebbia, C.A., Dominguez, J., Boundary Elements, an Introductory Course, 2nd edition, Computational Mechanics Publication, Southampton, McGraw-Hill Book Company, New York, (1992).
- Cruse, T.A., Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, International Journal of Solids and Structures, 5, 1259-1275, (1969).
- Fredholm, I., Sur une classe d'equations fonctionnelles, Acta Mathematica, 27, 365-390, (1903).
- Hess, J.L., and Smith, A.M.O., calculation of potential flows about arbitrary bodies, Progress in Aeronautical Sciences, 8, Pergamon Press, (1967).

- Jaswon, M.A., Integral equation method in potential theory, I, Proceeding of the Royal Society of London, Series A, 275, 23-32, (1963).
- Lachat, J.C., Watson, J.O., Effective numerical treatment of boundary integral equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, pp.991-1005, (1976).
- Massonnet, C.E., Numerical use of integral procedure, In Stress Analysis, Chapter 10, 198-235, Wiley, London, (1965).
- Mikhilin, S.G., Integral Equation, Pergamon Press, London, (1957).
- Rizzo, F.J., An integral equation approach to boundary-value problems of classical elastostatics, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 25, 83-95, (1967).
- Somigliana, C., Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo, Il Nuovo Cimento, serie III, vol.20, 81-185,(1886).
- Wrobel, L.C., The Boundary Element Method, vol I: applications in thermo-fluids and acoustics, Chichester, Wiley (2001).